

Seria 2

Rachunek prawdopodobieństwa Podstawowe definicje

Zadanie 1

Oblicz całkę Gaussowską:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt.$$

Zadanie 2

Rozważ funkcję Gamma, zdefiniowaną następująco

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Udowodnij następujące własności:

- a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- b) $\Gamma(1) = 1$,
- c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Zadanie 3

Wyprowadź wzór Stirlinga:

$$\ln N! \approx N \ln N - N, \text{ dla } N \rightarrow \infty.$$

Zadanie 4

Zakładając że w salę ćwiczeniową o wymiarach $3 \times 5 \times 2$ metrów wypełnia gaz doskonały o ciśnieniu 1000hPa i temperaturze 300K oblicz ile cząsteczek gazu znajduje się w sali.

Zakładając że położenia cząstek mają rozkład równomierny i są nieskorelowane (cząstki nie oddziałują i poruszają się niezależnie) oszacuj jakie jest prawdopodobieństwo, że gdziekolwiek w sali znajdzie się kostka o boku 1 mm (objętości 1 mm^3) w której liczba cząstek odchyli się od wartości oczekiwanej o więcej niż 0.1%.

Zadanie 5

Wyznacz wartość oczekiwaną $\langle x \rangle$ i wariancję σ_x^2 zmiennej losowej o rozkładzie normalnym (Gaussa):

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Oblicz funkcję charakterystyczną:

$$\chi(t) = \langle e^{itx} \rangle$$

i użyj jej do obliczenia kolejnych kumulant rozkładu normalnego.

Zadanie 6

Wyznacz funkcję charakterystyczną oraz funkcję generującą dla rozkładu Poissona o ustalonym λ :

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

i użyj ich do obliczenia kumulant rozkładu.

Zadanie 7

Wyznacz wartość oczekiwaną $\langle x \rangle$, wariancję σ_x^2 , funkcje charakterystyczne oraz funkcję generującą dla rozkładu dwumianowego o ustalonych N i p :

$$P(x = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Zadanie 8

Oszacuj prawdopodobieństwo, że zmienna o rozkładzie Gaussowskim będzie różniła się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż n odchyłeń standardowych (dla $n \gg 1$).

Zadanie 9

Rozważmy dwuwymiarowy rozkład Gaussa o gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho(x, y) = C e^{-\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma xy}.$$

Wyznacz stałą normalizacyjną C w funkcji α, β, γ . Oblicz wartości oczekiwane: $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle$. Oblicz $\langle xy \rangle$ i użyj do obliczenia współczynnika korelacji między x i y :

$$\text{corr}_{x,y} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Zadanie 10

Błądzenie losowe (3D) — Rozważ ruch cząstki w trzech wymiarach jako sekwencję N niezależnych kroków o długości l . Każdy krok tworzy kąt θ z osią z , z gęstością prawdopodobieństwa $p(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2(\theta/2)$. Natomiast kąt ϕ ma rozkład jednorodny z wartościami pomiędzy 0 a 2π . Cząstka startuje w początku układu. Po N krokach wyznacz następujące wartości oczekiwane: $\langle z \rangle, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z^2 \rangle, \langle x^2 \rangle$ i $\langle y^2 \rangle$, a także kowariancje $\langle xy \rangle, \langle xz \rangle$ i $\langle yz \rangle$.